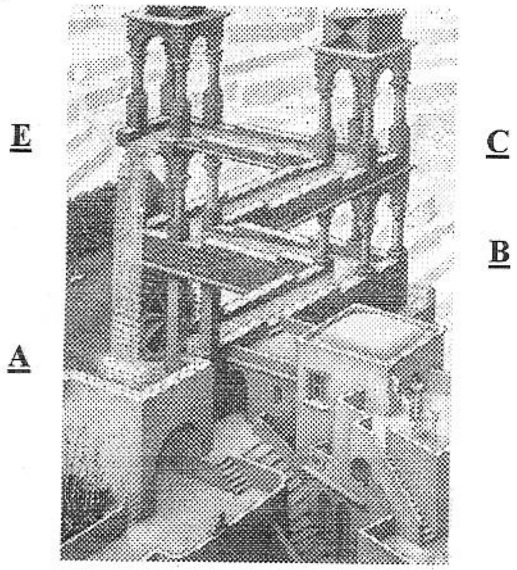
M.C. Eschers Vision nichttransitiver Welten - und deren verborgenes Mitwirken beim Bewerten, Wählen und Würfeln

von Karl Kießwetter



Aus Eschers „Wasserfall“

In Eschers Lithographie „Wasserfall“ fließt Wasser von selbst in einem Kreis und bewegt dabei noch ein Wasserrad. Ein derartiges Perpetuum mobile ist im physikalisch-theoretischen Sinne unmöglich. Aber auch unsere Umwelterfahrungen legen Widerspruch ein: Da Wasser von A zum Knick B fließt, muß A höher als B liegen. Wasser fließt aber auch von B zum Knick C, also liegt B höher als C. Insgesamt fließt Wasser von A nach C, also liegt A höher als C. Die Relation „ ...liegt höher als...“ pflanzt sich in diesem Sinne fort, ist also - gelehrt ausgedrückt - transitiv. Schließlich muß der Anfangspunkt A der Wasserrinne höher als deren Ende E sein. Dem künstlerischen Genie Eschers war es dann vorbehalten, in der durch ihn erschaffenen „unmöglichen“ Welt das Wasser von E aus in einem kleinen Wasserfall in das - höhere und gleichzeitig tiefere?! - Becken A stürzen und dabei auch noch ein Mühlrad antreiben zu lassen.

Auch der Mathematiker entdeckt neue Welten, und darunter nichttransitive, welche die Vision Eschers sogar widerspruchsfrei erfüllen. Darüber soll nachfolgend berichtet werden.

Die nichttransitive Welt der Bewertungsvorgänge

In Tabelle 1 ist eine einfache Struktur aufgeführt, welche der Konstellation bei Escher entspricht, aber im Gegensatz zu dieser keinen Widerspruch in sich birgt. Man kann die Tabelle u.a. so interpretieren:
Die 5 Kandidaten A, B, C, D und E werden von 5 Prüfern beurteilt. Diese geben dem nach ihrer Ansicht besten Kandidaten 5 Punkte, dem nach ihrer Meinung zweitbesten 4 Punkte usw. Der zweite Prüfer hält also B für am besten und A für am wenigsten geeignet (zweite Zahlenspalte).

A	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**
B	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
C	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**
D	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**
E	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Tab.1

Würde die Kommission nun über die Kandidaten paarweise abstimmen, ergäbe sich die folgende Konstellation: A wird mit 4 **:** 1 Stimmen (Prüfer 1, 3, 4 und 5 stimmen für A) für besser gehalten als B, der Kandidat B entsprechend mit 4 **:** 1 Stimmen für besser als C, aber auch C entsprechend für besser als D und D entsprechend für besser als E. Bei naivem Heran-

gehen ist man dann überzeugt, daß E „auf der Rangskala“ ganz unten liegen muß. Aber siehe da, bei der Abstimmung über A und E stellt sich Verblüffendes heraus:
Die Kommission hält E mit 4 **:** 1 Stimmen für besser als A. - Und wir haben hier einen geschlossenen besser-als-Kreis und nicht die bei Bewertungen in der Regel mit Selbstverständlichkeit erwartete lineare Anordnung.

In unserer Tabelle ist die Punktesumme in jeder Zeile gleich 15. Man könnte jedoch in der letzten Zeile auch 6 anstelle von 5 setzen, und/oder 7 anstelle von 5 in der zweiten Zeile, und dadurch diese Punktesummen variieren. Aber trotzdem würde sich nichts an den beschriebenen Abstimmungskonstellationen ändern. Sieht man noch genauer hin, so stellt man fest, daß man hier auf Punktezuweisungen ganz verzichten könnte. Z.B. geht vom zweiten Prüfer ja nur die Reihung B-C-D-E-A (von nach seiner Meinung besser bis schlechter) ein.

Man kann die Tabelle 1 auch zur Modellierung der Vorgänge benutzen, welche in einem einzelnen Prüfer bei seiner Bewertung von 5 mathematikbezogenen Hausarbeiten A bis E ablaufen und ihn schließlich zur Verzweiflung bringen können (2.Beispiel).
Wir gehen dabei davon aus, daß unser Prüfer 5 Bewertungskategorien benutzt, z.B.

(1) Kreativität / eigene Ideen , (2) mathematische Richtigkeit, (3) Art der Darstellung ,

(4) gekonntes Einbeziehen von einschlägiger Literatur , - und unbewußt und unvermeidbar

(5) Übereinstimmung in der Art des Denkens und Formulierens zwischen Prüfling und Prüfer.

Die einzelnen Spalten in Tabelle 1 halten die Bewertungen hinsichtlich dieser Kriterien fest. Das große Unbehagen entsteht dann dadurch, daß der Prüfer – in der Regel unbewußt – mitbekommt, daß er die Arbeiten zwar jeweils hinsichtlich der einzelnen Kriterien, aber eigentlich nicht hinsichtlich der Gesamtheit dieser Kriterien in eine lineare Anordnung des „...besser als...“ bringen kann, wie dies ihm sein Dienstauftrag zur Differenzierung mit Hilfe der üblichen Schulnoten vorgibt.

Ein erstes Resümee:
Bei der Entscheidung über „...höher als...“ bei Gegenständen ist offensichtlich Konsensbildung unproblematisch. Anders ist die Situation, wenn es um „...besser als...“ bei Bewertungen geht. Daß die dadurch angelegte Komplexität in der Regel nicht gesehen, nicht hinreichend berücksichtigt und - eigentlich unzulässig - durch lineare Anordnung modelliert wird, ist sogar in unserer Sprache verankert und wird deshalb wie mit der Muttermilch aufgesogen. Wir sprechen von einem höheren oder tieferen kulturellen Level, von höherer Schulbildung und von den oberen Zehntausend so, als könnte man dabei höher und tiefer mit Hilfe eines Maßbands oder auf andere Weise eindeutig feststellen. Insbesondere die lineare Modellierung durch simple Zahlen hat ja auch so einige „Wunder“-volle Vorteile: Man kann auf vermeintlich exakte Weise Durchschnittsnoten ausrechnen, aber auch, daß jemand dreimal so gut ist wie ein anderer, um wieviel Prozent der japanische Mathematikunterricht besser ist als der amerikanische - und noch manches mehr.

Nichtransitive Strukturen erzeugen befremdliche Gefühle auch bei Wählern

Unser drittes, ebenfalls stark vereinfachendes Beispiel befaßt sich mit der Wahl des französischen Präsidenten und dem Fall, daß für diese Wahl zwei Wahlgänge nötig werden und daß an der Wahl drei Kandidaten A, B und C beteiligt sind. In der nachfolgenden Tabelle bekommt wie oben der jeweils als besser bewertete Kandidat die höhere Punktzahl. Außerdem soll jede Spalte das Wahlverhalten von jeweils 2,5 Millionen Franzosen dokumentieren. Eine Vereinfachung besteht u.a. darin, daß wir voraussetzen daß genau die gleichen Wähler an beiden Wahlgängen beteiligt sind und zudem noch ihre Bewertung nicht verändern.

A	3	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2
B	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1
C	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
	a = 5					b = 4				c = 3		

Tab.2

Man sieht schnell, daß wir es hier wieder mit einem besser-als-Kreis, also mit einer nichttransitiven Struktur zu tun haben: A ist besser als B, B ist besser als C und trotzdem ist C besser als A. Man sieht aber auch unmittelbar ein, daß an einer oder an mehreren der umrahmten Stellen die jeweils oben stehende 2 mit der darunter stehenden 1 vertauscht werden kann, ohne daß sich an dem Sachverhalt der Intransitivität etwas ändert.

Kandidat A erhält im 1. Wahlgang ca. 41,7% der Stimmen, Kandidat B ca. 33,3% und Kandidat C genau 25%. Keiner hat damit die für eine Direktwahl nötigen „über 50%".

Also ist ein 2. Wahlgang nötig, an dem nur noch A und B beteiligt sind. In diesem wird dann A gewählt.

Die Franzosen sind jedoch mit dem Wahlausgang ziemlich unzufrieden, denn beim direkten Vergleich zwischen A und C halten nur 12,5 Millionen die Person A für geeigneter, aber 17,5 Millionen - also 5 Millionen mehr - den im ersten Wahlgang ausgeschiedenen Kandidaten C für den besseren Präsidenten.

Natürlich frägt man sich, wie oft eine derartige Konstellation auftreten kann. Es läge nahe, dafür den Computer zu programmieren, Jedoch gibt es mathematisch reizvollere Anschlußüberlegungen, von denen zudem einige die Arbeit dieses Rechenknechts vereinfachen sollten. Hierzu einige Beispiele:

Für den beschriebenen Wahlausgang ist nicht nötig, daß B besser als C beurteilt wird. In der obigen Tabelle 2 können deshalb auch noch in den Spalten 3, 4 und 5 die Zahlen 1 und 2 beliebig gesetzt werden. Man hat damit in dem a-Komplex sogar an 5 Stellen die Wahl zwischen 2 Eingaben. In dem c-Komplex müssen oben mindestens 2 Zweien stehen. Also hat man dort in der ersten Zeile die 4 Möglichkeiten 2-2-2, 1-2-2, 2-1-2 und 2-2-1. In unserer Tabelle 2 stecken somit $2^5.4$, also 128 einschlägige Konstellationen. Bei der gewählten festen Vorgabe von a, b und c gibt es insgesamt 2^{12} mögliche Anordnungen der Einsen und Zweien. Also ist hier die Chancenverteilung zwischen der Zahl der ein ungutes Gefühl erzeugenden Wahlausgänge der beschriebenen Art und den anderen Stimmenkonstellationen

$2^7 \; : \; (2^{12} - 2^7)$, was zu $1 : 31$ gekürzt werden kann.

Die „unschönen" Wahlausgänge scheinen also gar nicht so unwahrscheinlich zu sein.

Ausgehend von den Vorgaben a=5 , b=4 und c=3 (A steht a-mal an erster Stelle usw.) kann man auch Konstellationen angeben, bei denen B besser als A beurteilt und als Präsident gewählt wird – und wobei dann C besser als B bewertet wird. (Siehe die nachfolgende Tab.4)

Es stellt sich die Frage nach Verallgemeinerungen der Präsidentenwahltabelle 2. Man erkennt, daß dafür $a \geq b > c > 0$ und $b+c > a$ gelten muß. Und zur Verblüffung hat man damit eine Bedingung, die im wesentlichen der Dreiecksungleichung entspricht.

Die Verallgemeinerung der obigen Tabelle 2 kann vereinfacht als Tabelle 3 geschrieben werden. Man hat sich in dieser links einen Komplex aus a gleichen Spalten der angegebenen Art vorzustellen, daneben einen Komplex aus b gleichen Spalten und schließlich einen Komplex aus c gleichen Spalten. Die Tabelle 4 liefert dann die oben schon angesprochene andere „Drehrichtung“. Man beachte zudem die Verwandtschaft zwischen den Tabellen 3 und 1. Die Anordnung der 3 Spalten in Tabelle 3 ist eine Art von Urquell für viele weitere Tabellen, welche nichttransitive Strukturen liefern. Und daß in der Mathematik immer wieder ein derartiger Urquell zu entdecken ist, trägt ganz wesentlich zu ihrer Attraktivität bei.

a	b	c
3	1	2
2	3	1
1	2	3

Tab.3

a	b	c
3	2	1
1	3	2
2	1	3

Tab.4

Um die Reichhaltigkeit der in Tabelle 3 enthaltenen Beispiele der Art unserer Tabelle 2 anzudeuten, setzen wir a+b+c = 300 voraus. Für a kann dann 101, 102,...bis...149 gewählt werden. Nehmen wir z.B. a = 149 . Dann kann b = 149, 148, ... bis...76 gewählt werden. Es gibt also eine Fülle von Tabellen in der Art von Tabelle 2, bei denen die zugehörenden Wahlausgänge den Franzosen Bauchschmerzen bereiten. Und dann gibt es bei jeder dieser Tabellen noch Variationen in der oben beschriebenen Art, und davon in der Regel mehr als nur 128. Zudem muß man ja auch noch die andere „Drehrichtung“ berücksichtigen (Tab.4).

Und was hat das Wählen und Bewerten mit dem Würfeln zu tun?

Die folgende Tabelle für die Augenzahlen der drei Dodekaeder-Würfel A, B und C ist aus der obigen Tabelle 2 entstanden. Dazu wurde in der Tabelle 2 bei den Elementen in der zweiten Spalte die Zahl 3, in der dritten Spalte 6 ...usw....und in der letzten Spalte 33 addiert.

A	3	6	9	12	15	16	19	22	25	29	32	35
B	2	5	8	11	14	18	21	24	27	28	31	34
C	1	4	7	10	13	17	20	23	26	30	33	36

Tab.5/6

Die Tabelle 5 hat die „schöne“ Eigenschaft, daß darin alle Zahlen von 1 bis 36 genau einmal vorkommen. Vertauscht man noch zusätzlich an den drei markierten Stellen die obere mit der unteren Zahl - also 2 mit 1, 5 mit 4 und 35 mit 34 - , so erhält man eine Tabelle 6, welche dann sogar für alle drei Dodekaeder-Würfel die gleiche Augensumme 222 liefert.

Das Dodekaeder ist ein platonischer Körper und hat 12 kongruente Fünfecke als Außenflächen. Auch sonst ist es sehr regelmäßig gebaut, insbesondere liegen sich stets zwei dieser Außenflächen genau gegenüber. Man kann davon ausgehen, daß wie beim normalen Würfel die Wahrscheinlichkeiten für die Endlage nach dem jeweiligen Würfeln auf die Außenflächen gleichverteilt sind. Dodekaeder-Würfel gibt es in jedem besseren Spielegeschäft zu kaufen.

Analysiert man die Tabelle 5 hinsichtlich der Gewinnwahrscheinlichkeiten für das Spiel A gegen B (hier ist die Richtung A→B wichtig!), so erkennt man, daß 3 von A gegen 2 von B gewinnt, 6 von A gegen 2 und 5 von B, 15 und auch 16 von A gegen 2, 5, 8, 11, 14 von B usw. Für die 3 von A gibt es also nur eine Gewinnkonstellation, für 6 von A gibt es zwei solcher Gewinnkonstellationen, - und sowohl für 15 als auch für 16 von A gibt es 5 Gewinne. Interessant wird es, wenn man die jeweiligen Gewinnzahlen hintereinander aufschreibt.

Zahl der Gewinne für A : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + **5** + **6** + **7** + **8** + 10 + 11 + 12 = 74

Bis auf die 4 unterstrichenen „Ausfälle“ (um 1 zu wenig) hat man hier die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12, die auch schon die alten Griechen durch eine Rechnung der Art 12.13/2 = 78 bestimmen konnten. Geht man zur Tabelle 2 zurück, so sieht man, daß die 4 „Ausfälle“ dort zustande kommen, „wo b regiert“. Also ist 74 = 78 – b mit b = 4 .

Insgesamt erkennt man auf die eine oder andere Weise, daß A bei 74 von den 12^2 möglichen Kombinationen gewinnt, und B bei 70 , aber auch: Beim Spiel B gegen C gewinnt B in 75 und C in 69 Fällen. Und beim Spiel C gegen A sind die entsprechenden Zahlen 73 und 71. Gehen wir vom „Durchschnitt“ 74 **:** 70 aus, so kann man „kürzen“ zu 37 **:** 35 .

Beim Roulette im Kasino gewinnt die Bank in der Regel 19mal und der Spieler 18mal. Wir haben also in etwa die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn wir gleichverteilt mit dem jeweils besseren unserer drei Würfel gegen den jeweils schlechteren spielen. Es könnte also sogar sein, daß „Vater Staat“ die Lizenz für ein kommerziell genutztes Würfelspiel mit diesen Würfeln erteilte, bei dem sich zuerst der Spieler einen der 3 Dodekaeder-Würfel aussuchen darf und sich die Bank dann „den richtigen“ der beiden übrigen nimmt.

Für mittelalterliche Märkte oder die Verwendung auf einem Basar ist man von der Rücksicht auf eine faire Chancenverteilung befreit. Man wird sich deshalb um bessere Gewinnchancen für den Bankhalter bemühen. Außerdem ist es dafür sinnvoll, den normalen 6-flächigen Würfel zu benutzen.

Es liegt dazu nahe, zuerst einmal so wie eben vorzugehen. Dazu setzen wir a = b = c = 2 in Tabelle 3 voraus. Dann addieren wir wieder 0, 3, 6, ... zu den Elementen der jeweiligen Spalten und erhalten dadurch das nichttransitive Würfelsystem

A	***3***	***6***	***7***	***10***	***14***	***17***
B	***2***	***5***	***9***	***12***	***13***	***16***
C	***1***	***4***	***8***	***11***	***15***	***18***

Tab. 7

mit der Gewinnchancenverteilung A **:** B = B **:** C = C **:** A = 19 **:** 17 .

Man stellt außerdem fest, daß alle Zahlen von 1 bis 18 genau einmal als Augenzahl vorkommen und daß alle drei Augensummen gleich 57 sind.

Es gibt aber noch viel „bessere“, da chancenreichere Tripel aus 3 üblichen Würfeln. Ein solches, bei dem zwar ebenfalls alle Zahlen von 1 bis 18 genau einmal vorkommen und das ebenfalls Augensummenkonstanz vorweisen kann, das aber nicht auf die bisher benutzte Art aus der Tabelle 3 konstruiert wurde und auch nicht so hergestellt werden kann, ist

A	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***17***
B	***3***	***4***	***5***	***14***	***15***	***16***
C	***1***	***2***	***11***	***12***	***13***	***18***

Tab.8

mit der Gewinnchancenverteilung A **:** B = B **:** C = C **:** A = 21 **:** 15

Den „Herstellungsunterschied“ zwischen Tabelle 7 und Tabelle 8 erkennt man daran, daß nur die Tabelle 7 „spaltenmonoton“ ist, d.h. daß nur bei dieser und nicht bei Tabelle 8 jedes Element aus einer vorhergehenden Spalte kleiner als jedes Element aus einer der darauf folgenden Spalten ist (Bei Tabelle 8 sind z.B. 12, 14 und auch 11 nicht kleiner als 10).

Anregungen und Orientierungen

- Für den kreativen Mathematiker ist mit den bisherigen Ausführungen ein umfangreiches Problemfeld und damit der Anlaß zur Theoriebildung vorgegeben. Naheliegende Anschlußprobleme sind u.a.:

In dem Bild von Escher gibt es zwischen A und dem Knick B keinen großen Höhenunterschied, und den gleichen Höhenunterschied gibt es zwischen B und dem nächsten Knick C, zwischen C und D und zwischen D und E. Der Höhenunterschied zwischen E und A ist jedoch viel größer. Die Tabelle 1 simuliert gleiche Höhenunterschiede. Kann man diese Tabelle so verändern bzw. ergänzen, daß die dadurch entstehende neue Tabelle besser zu dem Escherbild paßt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Franzosen durch ihr Wahlverhalten eine Konstellation der oben beschriebenen Art produzieren, welche ihnen einen Präsidenten beschert, den sie eigentlich gar nicht wollen?

Welches ist ein hinsichtlich der Gewinnchancenverteilung optimales Würfelsystem? Dabei betrachtet man Systeme aus k und nicht nur aus 3 Würfeln - und außerdem n-Würfel mit allgemein n und nicht nur 6 oder 12 gleichwertigen Belegungsstellen.

Solche Würfel kann man nicht nur auf platonischen Körpern realisieren, sondern z.B. auch mit Hilfe von Glücksrädern. Bei Glücksrädern kann man aber durch geeignete (nicht gleichverteilte) Vorgabe der Markierungen auf dem Außenkreis die Augenzahlen mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten versehen. Was kann man in unserem Zusammenhang mit derartigen „Würfeln" anstellen?

- Das skizzierte Material stammt aus dem Forschungs- und Förderprojekt „Hamburger Modell". In den Fördergruppen entstanden zur Thematik schon mehrere kleine elementarmathematische Theorien. Die erste dieser kleinen Theorien wurde 1989 in den „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg" veröffentlicht (Heft 6 / Band XI).
Die zentrale Frage ist dort, ob und welche Würfel W unbesiegbar in dem Sinne sind, daß es keine anderen gleichartigen Würfel mit der gleichen Augensumme s gibt, die gegen W gewinnen. Eines der nicht selbstverständlichen Ergebnisse ist, daß es allgemein für $s > n^2$, wobei n = Zahl der Würfelflächen ist, keinen derartigen unbesiegbaren Würfel gibt, daß also für jedes n nur endlich viele unbesiegbare Würfel existieren (die dann der Computer bestimmen kann). Für $n = 6$, also bei den üblichen Würfeln, gibt es 18 unbesiegbare Würfel, und die größte dabei auftretende Augensumme ist 36 (Auf den Würfelflächen stehen in diesem speziellen Fall dann die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11).